Hochschule Esslingen
University of Applied Sciences

Knobelaufgabe Mathematikwettbewerb, Wintersemester 2017/2018

In den folgenden Rechnungen soll jeder Buchstabe so durch eine Ziffer ersetzt werden, dass eine richtige Rechnung entsteht. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Als Anfangsziffer soll nicht die Ziffer Null auftreten. Die drei Aufgaben sind unabhängig voneinander zu betrachten. Untersuchen Sie für alle Aufgaben auch, ob es mehrere richtige Lösungen gibt und geben Sie jede Lösung an.

Aufgabe 1:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{Z} & \mathrm{W} & \mathrm{E} & \mathrm{I} \\ + & \mathrm{D} & \mathrm{R} & \mathrm{E} & \mathrm{I} \\ \hline = & \mathrm{F} & \mathrm{\ddot{U}} & \mathrm{N} & \mathrm{F} \end{array}$$

Aufgabe 2:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{E} & \mathrm{I} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \\ + & \mathrm{N} & \mathrm{E} & \mathrm{U} & \mathrm{N} \\ \hline = & \mathrm{Z} & \mathrm{E} & \mathrm{H} & \mathrm{N} \end{array}$$

Aufgabe 3:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{E} & \mathrm{I} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \\ + & \mathrm{E} & \mathrm{I} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \\ + & \mathrm{E} & \mathrm{I} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \\ + & \mathrm{E} & \mathrm{I} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \\ + & \mathrm{E} & \mathrm{I} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \\ \hline = & \mathrm{F} & \mathrm{\ddot{U}} & \mathrm{N} & \mathrm{F} \end{array}$$

Aufgabe 1 - Lösung:

$$\begin{array}{ccccc} & Z & W & E & I \\ + & D & R & E & I \\ \hline = & F & \ddot{U} & N & F \end{array}$$

Aus der letzten Spalte sieht man leicht, dass F eine gerade Zahl sein muss. Aus der ersten Spalte ergibt sich desweiteren

$$1 + 2 \leq Z + D \leq F,$$

also kommen für F nur die Ziffern 4,6 und 8 in Frage. Das Zahlenrätsel mit weiteren logischen Überlegungen zu lösen ist jedoch sehr aufwendig und erfordert etliche Fallunterscheidungen. Man sieht jedoch leicht, dass aus jeder Lösung wieder eine richtige Lösung entsteht, wenn die beiden Ziffern Z und D oder die beiden Ziffern W und R miteinander vertauscht werden. Wir geben der Einfachheit halber hier also nur die Lösungen mit $Z < D$ und $W < R$ an und verzichten auf diese Vertauschungen. Mit Hilfe eines Matlab-Codes werden die folgenden 28 Lösungen gefunden, was unter Berücksichtigung der angegbenen Vertauschungen zu insgesamt 112 Lösungen führt:

Z	W	E	I	D	R	F	U	N
1	0	9	2	3	5	4	6	8
1	0	9	2	3	6	4	7	8
1	2	9	3	4	7	6	0	8
1	0	7	3	5	8	6	9	4
1	2	9	3	5	4	6	7	8
1	2	4	3	5	7	6	9	8
2	1	9	3	4	5	6	7	8
2	1	5	3	4	7	6	9	0
1	3	2	8	4	7	6	0	5
2	5	0	8	3	9	6	4	1
1	2	5	4	7	3	8	6	0
1	2	5	4	7	6	8	9	0
1	3	6	4	7	5	8	9	2
2	1	3	4	5	9	8	0	6
2	1	5	4	6	7	8	9	0
3	1	6	4	5	7	8	9	2
1	3	2	9	6	7	8	0	5
1	0	6	9	7	4	8	5	3
2	4	1	9	5	6	8	0	3
2	4	3	9	5	6	8	0	7
2	6	0	9	5	7	8	3	1
2	0	5	9	6	3	8	4	1
2	0	7	9	6	3	8	4	5
2	1	3	9	6	4	8	5	7
2	3	0	9	6	4	8	7	1
3	2	5	9	4	7	8	0	1
3	5	0	9	4	7	8	2	1
3	2	0	9	5	4	8	6	1

Lösungen:

Aufgabe 2 - Lösung:

$$\begin{array}{ccccc} & E & I & N & S \\ + & N & E & U & N \\ \hline = & Z & E & H & N \end{array}$$

Aus der letzen Spalte erhalten wir, dass $S = 0$ sein muss. Wenn kein Übertrag von der dritten in die zweite Spalte erfolgt, ergibt sich in der 2.Spalte wie gerade $I = 0$. Das ist aber nicht möglich, weil die Ziffer 0 schon an S vergeben ist. Also gibt es einen Übertrag von der dritten in die zweite Spalte aus der zweiten Spalte erhalten wir $I = 9$. Mit den beiden verbleibenden Gleichungen

$$\begin{aligned} N + U &= H + 10 \\ E + N + 1 &= Z \end{aligned}$$

ergibt sich durch Auflösen nach N und Gleichsetzen

$$H + 10 - U = Z - E - 1.$$

Eine einfache Umformung liefert

$$H + E + 11 = Z + U,$$

also

$$14 = 1 + 2 + 11 \leq H + E + 11 = Z + U \leq 7 + 8 = 15.$$

1.Fall: $H + E + 11 = Z + U = 14$

$H = 1,\ E = 2$ (oder umgekehrt) und $Z = 6,\ U = 8$ (oder umgekehrt)

2.Fall: $H + E + 11 = Z + U = 15$

$H = 1,\ E = 3$ (oder umgekehrt) und $Z = 7,\ U = 8$ (oder umgekehrt)

Es bleiben also noch 8 Kombinationen übrig, die überprüft werden. Dies ergibt die folgenden sechs Lösungen:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 9 & 4 & 0 \\ + & 4 & 1 & 8 & 4 \\ \hline = & 6 & 1 & 2 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 1 & 9 & 5 & 0 \\ + & 5 & 1 & 8 & 5 \\ \hline = & 7 & 1 & 3 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 1 & 9 & 6 & 0 \\ + & 6 & 1 & 7 & 6 \\ \hline = & 8 & 1 & 3 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 9 & 3 & 0 \\ + & 3 & 2 & 8 & 3 \\ \hline = & 6 & 2 & 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 2 & 9 & 5 & 0 \\ + & 5 & 2 & 6 & 5 \\ \hline = & 8 & 2 & 1 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 3 & 9 & 4 & 0 \\ + & 4 & 3 & 7 & 4 \\ \hline = & 8 & 3 & 1 & 4 \end{array}$$

Aufgabe 3 - Lösung:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{E} & \mathrm{I} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \\ + & \mathrm{E} & \mathrm{I} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \\ + & \mathrm{E} & \mathrm{I} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \\ + & \mathrm{E} & \mathrm{I} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \\ + & \mathrm{E} & \mathrm{I} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \\ \hline = & \mathrm{F} & \mathrm{\ddot{U}} & \mathrm{N} & \mathrm{F} \end{array}$$

Aus der letzten Spalte ergibt sich

$$5 \cdot S = F + 10 \cdot (\text{Übertrag 1}),$$

also ist $F = 0$ oder $F = 5$. Da F aber auch in der ersten Spalte steht, ist $F = 5$. Damit ergibt sich aus der ersten Spalte sofort $E = 1$ und es gibt keinen Übertrag von der zweiten in die erste Spalte. Desweiteren muss S eine ungerade Zahl sein, also $S = 3$, $S = 7$ oder $S = 9$, da bereits $E = 1$ und $F = 5$ gilt. In der dritten Spalte erhalten wir

$$5 \cdot N + (\text{Übertrag 1}) = N + 10 \cdot (\text{Übertrag 2}),$$

also

$$4 \cdot N + (\text{Übertrag 1}) = 10 \cdot (\text{Übertrag 2}).$$

Daher muss der Übertrag 1 von der vierten in die dritte Spalte eine gerade Zahl sein, das ist aber nur für $S = 9$ der Fall. Schließlich erhalten wir aus

$$4 \cdot N + 4 = 4 \cdot (N + 1) = 2 \cdot 5 \cdot (\text{Übertrag 2}),$$

dass 5 ein Teiler von $N + 1$ sein muss, also ist $N = 4$, da bereits $S = 9$ gilt. Damit ergibt sich ein Übertrag von 2 von der dritten in die zweite Spalte und in dieser erhalten wir

$$5 \cdot I + 2 = \text{Ü}$$

Für $I \geq 2$ ergibt sich ein Übertrag in die erste Spalte, also ist $I = 0$, da bereits $E = 1$ ist. Schließlich ist Ü=2 und wir erhalten die eindeutige Lösung

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 4 & 9 \\ + & 1 & 0 & 4 & 9 \\ + & 1 & 0 & 4 & 9 \\ + & 1 & 0 & 4 & 9 \\ + & 1 & 0 & 4 & 9 \\ \hline = & 5 & 2 & 4 & 5 \end{array}$$